НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

ЛЕКЦИЯ 3

2 МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

2.1 Функции и операторы

Мы уже говорили о том. что причиной низкого качества регулирования или даже потери устойчивости являются динамические свойства систем. В системе фигурируют сигналы и динамические звенья. Как представить статические, а также динамические свойства сигналов и звеньев средствами математики? Статические зависимости звеньев выражаются функциями, а динамические – операторами. Вспомним, что такое функция и оператор.

2.1.1 Функция.

Функция – *это правило, которое каждому значению независимой переменной ставит в соответствие определенное значение зависимой переменной.*

Функция – важная категория в математике. Например, правая часть дифференциальных уравнений, представленных в форме Коши (см. ниже п. 2.2.3), представляет собой набор функций. Следовательно, свойства решений этих дифференциальных уравнений и поведение системы определяются свойствами функций в их правых частях. Это особенно важно для нелинейных уравнений.

Скалярная функция записывается следующим образом

$$y = f(u) \ , \tag{2.1}$$

где u – независимая переменная;

y – зависимая переменная;

f – условное обозначение правила, выражающего функцию.

Например, ток, как функция напряжения, согласно закону Ома запишется в виде

$$y = \frac{1}{R} u \ , \tag{2.2}$$

где R – электрическое сопротивление нагрузки.

Другой пример – уравнение параболы

$$y = au^2 + b \ , \tag{2.3}$$

где a, b – коэффициенты.

Функция может быть задана неявно, тогда эта функция будет алгебраическим уравнением. Неявный вид функции более общий, чем функция в явном виде. Например, (2.2) можно представить в виде

$$\frac{1}{R} u - y = 0 \ , \tag{2.4}$$

Это уже алгебраическое уравнение, но оно также выражает функцию.

Функция может быть задана в параметрической форме, например

$$u_1 = p(t) \ , \ \ u_2 = q(t) \ ,$$

где t – промежуточная переменная, или параметр.

Параметр можно t исключить, решив одно из уравнений относительно t и подставив решение во второе уравнение, в итоге получаем уравнение в обычной форме $u_1 = f(u_2)$.

Функция называется линейной, если выполняется принцип суперпозиции. Пример линейной функции:

$$y = ax\ . \tag{2.5}$$

Функция называется непрерывной (или класса C^0), если малым приращениям независимой переменной соответствуют также малые изменения функции.

Функция называется гладкой (или класса C^1), если она непрерывна и непрерывна ее первая производная по независимой переменной. Примеры – на рисунках 2.1 и 2.2.

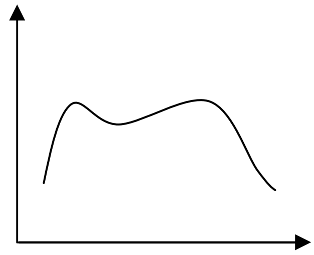

Рисунок 2.1 – Пример непрерывной и гладкой функции

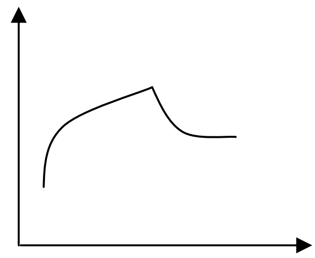

Рисунок 2.2 – Пример непрерывной и негладкой функции

Имеем функцию $f(u) = y$. *Обратной функцией* $f^{-1}(y) = u$ *называется функция, удовлетворяющая условию*

$$f(f^{-1}(y)) = y\,.$$

Пример: Если $y = u^2$, то обратной будет функция $u = \sqrt{y}$.

Зависимых и независимых переменных, а также и функций может быть несколько.

Запишем их в виде системы

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(u_1, u_2, \ldots u_n), \\ y_2 &= f_2(u_1, u_2, \ldots u_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\ y_m &= f_m(u_1, u_2, \ldots u_n), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где n – количество переменных, m – количество функций. Функции (2.6) удобно записать в векторно-матричном виде

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{u})\,, \tag{2.7}$$

где

$\vec{y} = [y_1, y_{2,} ..., y_m]^T$, $\vec{u} = [u_1, u_{2,} ..., u_n]^T$, $\bar{f} = [f_1, f_{2,} ..., f_m]^T$, T – знак транспонирования.

Рассмотрим функцию, заданную неявно в виде уравнения

$$\vec{f}(\vec{u}) = 0 \ . \tag{2.8}$$

Это уравнение определяет в пространстве переменных $\vec{u}$ некоторый геометрический объект. Если количество уравнений равно количеству переменных, то есть $n = m$, и уравнения разрешимы, то это решение является точкой в пространстве $\vec{u}$. Если количество уравнений на одно меньше, чем размерность u, то есть $n - m = 1$, то этим объектом является линия, если на два, то – поверхность, если более, чем на два – гиперповерхность размерностью $n - m$.

Таким образом: *Система "m" функций "n" переменных определяет в пространстве этих переменных гиперповерхность размерностью "n - m "*.

<u>Пример 2.1</u>

Имеем функцию двух переменных $u_1; u_2$

$$u_2 = -0{,}5u_1 + 1 .$$

Здесь количество переменных – 2, количество уравнений – 1, поэтому этой функции в координатах $u_1; u_2$ соответствует прямая линия, проходящая через точки $u_1 = 0;\ \ u_2 = 1$ и $u_1 = 2;\ \ u_2 = 0$.

<u>Пример 2.2</u>

Имеем функцию двух переменных $u_1; u_2$

$$u_2 = 2 .$$

По условию имеем функцию двух переменных, поэтому, несмотря на то, что переменной u_1 в этой функции нет, значение u_1 может быть любым. Следовательно, графиком этой функции на плоскости переменных u_1 и u_2 является горизонтальная прямая, проходящая через точку $u_2 = 2$ при любом u_1 .

2.1.2 Оператор.

Теперь рассмотрим операторы. Что это такое? *Оператор каждой исходной функции ставит в соответствие определенную функцию на выходе.*

Оператор – более общая категория, чем функция. То есть оператор включает в себя также и функцию.

В общем виде оператор можно записать следующим образом

$$y(t) = F(\varphi(t), t) ,$$

где $y(t)$ – выходная функция;

$\varphi(t)$ – входная функция;

t – независимая переменная, например, время;

$F(\cdot)$ – условное обозначение правила, выражающего оператор.

Операторы могут быть разными. Пример – общеизвестный оператор Лапласа

$$x(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \ ,$$

это выражение каждой функции времени *x(t)* ставит в соответствие функцию комплексной переменной *x(s)*, то есть это, по определению, – оператор. Операторы, также как и функции, могут быть заданы неявно.

Наиболее распространены операторы, представленные дифференциальными уравнениями. Пример такого оператора: линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое имеет вид

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \ . \tag{2.9}$$

Здесь $u(t)$ – входная переменная, она задана, как входная функция от времени;

$y(t)$ – выходная переменная, также является функцией времени, как результат действия входной функции.

Операторы в виде дифференциальных уравнений широко используются в теории управления. Рассмотрим их более подробно.

2.2 Виды операторов, представляющих динамические системы

Мы очень коротко остановимся на математических методах представления динамических систем, выделяя только основные идеи, понятия и определения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Будем рассматривать для простоты системы с одним входом и одним выходом. При этом зависимость переменных от времени не всегда будем записывать, то есть вместо, например, $x(t)$ мы будем писать x. Производную по времени будем обозначать в виде: $\frac{dx}{dt}$ или $\dot{x}$, i-ю производную будем обозначать $\frac{d^n x}{dt^n}$ или $x^{(i)}$.

2.2.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения общего вида.

Для системы с одним входом и одним выходом такое уравнение имеет вид

$$F(y, y^{(1)},..., y^{(n)}, u, u^{(1)},..., u^{(m)}, t) = 0 \, , \tag{2.10}$$

где y – выход системы; u – вход системы, или для объекта управления это управляющее воздействие; t – время; F – некоторая функция.

Для линейной системы с одним входом и одним выходом уравнение (2.10) записывается в виде

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + ... + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad , \tag{2.11}$$

где a_i, b_i – коэффициенты.

Для решения дифференциальных уравнений (2.10), (2.11) необходимо задать начальные условия, то есть значения как самих переменных y и u, так и их производных при $t = 0$.

Входная переменная u отражает внешние воздействия на систему, но устойчивость для линейных систем зависят от собственного поведения системы. Это поведение определяется однородным уравнением, которое получается из (2.11) при $u = 0$

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0 \quad . \tag{2.12}$$

Для исследования поведения однородного уравнения (2.12) составляется его характеристическое уравнение

$$a_n\lambda^n + \ldots + a_2\lambda^{2n} + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad (2.13)$$

и определяются его корни. При отрицательных действительных частях корней (2.13) система (2.12) устойчива.

Для нелинейных систем (2.10) исследование устойчивости – значительно более сложная задача.

2.2.2 Передаточные функции.

Они используются только для линейных систем. Передаточная функция системы (2.11) имеет вид

$$\frac{y(s)}{u(s)} = W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad (2.14)$$

где s – комплексная переменная преобразования Лапласа; *u(s)* – изображение по Лапласу входной переменной; *y(s)* – изображение по Лапласу выходной переменной.

При замене s на мнимое число $j\omega$ мы из передаточной функции (2.14) получаем аналитическое выражение амплитудно-фазовой частотной характеристики (назовем ее, как АФХ). Здесь ω– угловая частота входного сигнала.

Применение передаточных функций позволяет заменить дифференциальные уравнения алгебраическими соотношениями, что значительно проще и нагляднее. Для линейных одномерных систем такой подход оказался весьма плодотворным и поэтому широко используется в теории и практике построения систем управления. Однако для нелинейных звеньев передаточные функции в обычном виде теряют свои преимущества и не используются.

Несмотря на это в методах теории нелинейных систем передаточные функции и АФХ также широко используются для описания линейных звеньев. Мы уже говорили о том, что часто нелинейную систему можно приближенно представить линейной системой, говорят, выполнить ее линеаризацию. Затем для расчета этой линеаризованной системы можно использовать линейные методы. Кроме того, в нелинейной системе обычно можно выделить линейную и нелинейную части и тогда удобно рассматривать поведение такой системы, как взаимодействие этих частей. Тогда опять для описания линейных частей используются линейные методы.

2.2.3 Представление в пространстве состояний.

Мы рассмотрели некоторые методы представления операторов динамических систем. Это дифференциальные уравнения и передаточные функции с частотными характеристиками. Теперь рассмотрим еще одну форму – представление систем в пространстве состояний, или, иначе в фазовом пространстве. Такое представление благодаря своим преимуществам находит широкое применение как для линейных, таки и для нелинейных систем.

Любую систему можно характеризовать совокупностью переменных, изменяющихся во времени. Для дифференциального уравнения это могут быть выходные переменные и их производные. Каждый набор таких переменных часто удобно представить, как элемент некоторого вещественного пространства размерностью n, обозначается это пространство, как R^n. Естественно выбрать такой набор переменных, который бы полностью характеризовал (определял) нашу систему. Тогда это пространство и будет пространством состояний данной системы. Еще это пространство называется фазовым пространством. Таким образом, *пространством состояний, или фазовым пространством системы или процесса называется такое пространство, каждый элемент которого полностью определяет состояние рассматриваемой системы или процесса*. Элемент – это набор переменных.

<u>Пример 2.1.</u> Представить в пространстве состояний движение автомобиля по прямой дороге. Принимаем за начало отчета некоторую точку на дороге. Тогда можно предположить, что расстояние от автомобиля до этой точки и есть единственная переменная состояния. Но

автомобиль на данном расстоянии может стоять или двигаться с разной скоростью. Это значит, что расстояние не полностью характеризует состояние автомобиля. Теперь, если мы будем характеризовать состояние автомобиля расстоянием и скоростью, то эти переменные и будут при данной постановке задачи переменными состояния. Отметим, что движение автомобиля, как абсолютно жесткой механической системы по прямой дороге может быть описано дифференциальным уравнением 2 – го порядка.

Установлено, что если система задана дифференциальным уравнением n – го порядка, то пространство состояний этой системы будет иметь размерность n. Таким образом, *размерность пространства состояний, соответствующее обыкновенному дифференциальному уравнению, равна порядку этого уравнения*.

Схематично ОУ в пространстве состояний показан на рисунке 2.1.

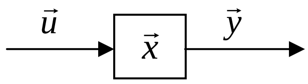

Рисунок 2.1 – Схема представления объекта управления в пространстве состояний

На рисунке 2.1: $\vec{x}$ – вектор переменных состояния.

Преобразование дифференциальных уравнений общего вида в уравнения в пространстве состояний можно выполнить следующим образом. Примем для простоты, что у нас в (2.10) отсутствуют производные от управляющего воздействия u. Решим уравнение (2.10) относительно старшей производной, обычно это можно всегда сделать. В итоге получим

$$y^{(n)} = f(y, y^{(1)},..., y^{(n-1)}, u, t) = 0\,. \tag{2.15}$$

Обозначим: $x_1 = y$, $\dot{x}_i = x_{i+1}$ при $i = 1...n-1$, $\dot{x}_n = y^{(n)}$.

Тогда уравнение (2.15) преобразуется в систему уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = x_3, \\ &.......... \\ &\dot{x}_n = f(x_1, x_1, ... x_1, u, t), \\ &y = x_1. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Переменные x_i при $i = 1...n$ называются переменными состояния системы (2.16). Первые n уравнений (2.16) называются уравнениями состояния, последнее алгебраическое уравнение $y = x_1$ называется уравнением выхода. В (2.15) принято, что производные от u отсутствуют, но при их наличии это уравнение можно также привести к виду типа (2.16), но более сложным образом.

Время отражает нестационарность правых частей (2.16) и действие на систему возмущений.

Уравнения, записанные в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, называются нормальной формой Коши, или просто нормальной формой.

Используя линейную алгебру, математическую модель (2.16) в пространстве состояний можно представить в весьма компактном виде

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, u, t)\,, \tag{2.17}$$

$$y = x_1 \tag{2.18}$$

где $\vec{x} = [x_1 x_2 ... x_n]^T$ – вектор состояния; $\vec{f} = [f_1, f_2, ..., f_n]^T$ – вектор функций в правых частях, для (2.16) он имеет вид: $\vec{f} = [x_2, x_3, ..., f]^T$; T – знак транспонирования.

В дальнейшем, согласно (2.18) выходом будем считать x_1 и поэтому (2.18) мы не будем рассматривать. Начальным значением для (2.17) является вектор $\vec{x}(0) = [x_1(0), x_2(0) ... x_n(0)]^T$.

Уравнение (2.17), *как и ранее, называется уравнением состояния,*

Если в правых частях (2.17) u постоянное (в частном случае оно может быть равно нулю), а t отсутствует, то такая система называется автономной. Итак: *Динамическая система, в которой входные воздействия постоянные, а время t в правой части отсутствует, называется автономной системой*. Такую систему можно записать в виде

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}), \tag{2.19}$$

В дальнейшем мы будем широко использовать представление систем в пространстве состояний (в фазовом пространстве).